ENS Ulm et Sèvres 1985

GROUPE A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

Avertissement

Dans l'évaluation des copies il sera tenu compte de la qualité de la rédaction, notamment pour ce qui est de la clarté et de la concision.

Les résultats de questions non traitées peuvent être utilisés dans la suite du problème en indiquant qu'ils sont admis.

La section 4 ne dépend que de la section 2. Les parties 5, 6 et 8 utilisent les sections antérieures. Les parties 5 et 6 font intervenir un résultat dont la démonstration fait l'objet de la section 7 (celui-ci est énoncé en 7-9).

La section 7 peut être traitée directement après la section 1.

L'objet du problème est l'étude de propriétés des fonctions définies sur un ouvert Ω du plan vérifiant $\Delta u = 0$ ainsi que la résolution de l'équation avec « conditions aux limites » (ou « problèmes aux limites ») :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où φ est une fonction donnée.

Préambule, notations et hypothèses

1° Les points de $\mathbb{R}^2$, $a, x, y, \ldots$, ont pour coordonnées $a = (a_1, a_2)$, $x = (x_1, x_2), \ldots$ $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme usuelle qui sera notée $|.|$: $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$. La distance dans $\mathbb{R}^2$ est désignée par d. On notera les boules :

$$B_R(y) = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; d(x, y) < R \}$$

$$\overline{B}_R(y) = \{ x \in \mathbb{R}^2 ; d(x, y) \leqslant R \}$$

Sauf mention contraire, l'expression « boule B » désigne une boule ouverte non vide, c'est-à-dire $B = B_R(a)$ pour certains $a \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$. Pour une partie $\omega \subset \mathbb{R}^2$, on désigne par $\overline{\omega}$ son adhérence et par $\partial\omega$ sa frontière. On utilise la notation $A \setminus B = \{ x \in A ; x \notin B \}$.

Le passage en coordonnées polaires d'origine $a \in \mathbb{R}^2$ est défini par :

$(x_1, x_2) \to (r, 0)$ avec $x = a + r\,p(0)$ où $p(0) = (\cos 0, \sin 0)$, $r \geqslant 0$, $0 \in [0, 2\pi]$
$(x_1 = a_1 + r\cos 0, \quad x_2 = a_2 + r \sin 0)$.

2° Dans tout le problème, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ayant la propriété suivante :

(I') Pour tous $x, y \in \Omega$, il existe une application continue $g : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $g(0) = x$, $g(1) = y$ et $g(t) \in \Omega \quad \forall\, t \in [0, 1]$.

Pour un ouvert $\Omega' \subset \Omega$, la notation $\Omega' \subset\subset \Omega$ signifie :

i. $\overline{\Omega'} \subset \Omega$;

ii. $\overline{\Omega'}$ est borné.

$C^0(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et $C^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions k fois continûment différentiables dans Ω.

Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, les expressions du type $f = 0$ dans Ω (ou $f \geqslant 0$ sur $\partial\Omega$) signifient $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \Omega$ (ou $f(x) \geqslant 0$, $\forall\, x \in \partial\Omega$). La notation $f \mid \partial\Omega$ désigne la restriction de f à $\partial\Omega$.

3° Les intégrales doubles sur une région $D \subset \mathbb{R}^2$ seront notées :

$$\iint_D f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \iint_D f\, dx_1\, dx_2$$

Pour une fonction $f \in C^0(\overline{B}_R(a))$. On utilisera, sans qu'on ait à les justifier, les formules du type :

$$\iint_{B_R(a)} f \, dx_1 \, dx_2 = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^R f(a + r\,p(\theta))\, r \, dr \right\} d\theta$$

$$= \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} f(a + r\,p(\theta))\, d\theta \right\} r \, dr$$

On pourra également utiliser pour les fonctions de classe C^1 le théorème de « la dérivation sous le signe somme ».

4° On notera $E(\Omega) = C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ et, pour $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. On pose dans tout le problème :

$$H(\Omega) = \{ u \in E(\Omega) ; \ \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \}$$
$$H^+(\Omega) = \{ u \in E(\Omega) ; \ \Delta u \leqslant 0 \text{ dans } \Omega \}$$
$$H^-(\Omega) = \{ u \in E(\Omega) ; \ \Delta u \geqslant 0 \text{ dans } \Omega \}.$$

1. Préliminaires

Dans cette partie, il est demandé de vérifier *rapidement* diverses relations concernant les intégrales doubles. On considère des fonctions $u, v \in C^1(\Omega)$ et une boule $B = B_R(a) \subset\subset \Omega$.

1.1. Vérifier la relation :

$$\iint_B \frac{\partial u}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_2 = R \int_0^{2\pi} u(a + R\,p(\theta)) \cos\theta \, d\theta.$$

Énoncer une formule analogue pour $\iint_B \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \, dx_1 \, dx_2$.

1.2. En déduire :

$$\iint_B \left\{ v \frac{\partial u}{\partial x_1} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\} dx_1 \, dx_2 = R \int_0^{2\pi} u(a + R\,p(\theta))\, v(a + R\,p(\theta)) \cos\theta \, d\theta.$$

1.3. On pose :

$$I_B(u, v) = R \int_0^{2\pi} \left\{ v(a + R\,p(\theta)) \frac{\partial u}{\partial r}(a + R\,p(\theta)) - u(a + R\,p(\theta)) \frac{\partial v}{\partial r}(a + R\,p(\theta)) \right\} d\theta,$$

$\left(\text{où } \dfrac{\partial u}{\partial r}(a + R\,p(\theta)) \text{ désigne la dérivée de l'application } r \longmapsto u(a + r\,p(\theta)) \right.$ évaluée en $r = R\Big)$. Pour $u, v \in C^2(\Omega)$ établir la relation :

$$\iint_B \{ v \Delta u - u \Delta v \} \, dx_1 \, dx_2 = I_B(u, v).$$

1.4. Soit $b \in B_R(a)$ et $0 < \rho < R - d(a, b)$. On pose : $D = B_R(a) \setminus B_\rho(b)$. Soient $u, v \in C^2(\Omega \setminus \{ b \})$. Exprimer :

$$\iint_D \{ v \Delta u - u \Delta v \} \, dx_1 \, dx_2$$ à l'aide de $I_{B_R(a)}(u, v)$ et de $I_{B_\rho(b)}(u, v)$.

[On observera que u et v ne sont pas nécessairement définies en b.]

2. Formules de moyennes

2.1. Soit $u \in H(\Omega)$ et $B_{R(a)} \subset\subset \Omega$. Que peut-on dire de la fonction $\rho \longmapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} u(a + \rho\,p(\theta))\, d\theta$ pour $0 < \rho \leqslant R$? [On pourra utiliser 1.3. avec $v = 1$.]

2.2. Pour $u \in H(\Omega)$ trouver une relation entre $u(a)$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} u(a + R\,p(\theta))\, d\theta$.

2.3. En déduire une relation entre $u(a)$ et $\displaystyle\iint_{B_R(a)} u \, dx_1 \, dx_2$ vérifiée par les fonctions $u \in H(\Omega)$.

2.4. Établir pour les fonctions $u \in H^+(\Omega)$ (respectivement $u \in H^-(\Omega)$) des inégalités correspondant aux relations d'égalités des deux questions précédentes.

3. Principe du maximum

3.1.*a*. Soit $u \in H^1(\Omega)$; on suppose que $a \in \Omega$ est tel que $u(a) = \inf_\Omega u$. Montrer que u est constante dans un voisinage de a. [On pourra utiliser 2.3.]

b. En déduire que u est constante dans Ω [à l'aide de la propriété (P) du préambule.]

3.2. On suppose de plus que Ω est borné. Montrer que $u \in H^+(\Omega)$ (respectivement $u \in H^-(\Omega)$) vérifie $\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$ (resp. $\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u$).

3.3. Soit $u \in H(\Omega)$, $v \in H^-(\Omega)$ telles que $v = u$ sur $\partial\Omega$. Comparer u et v dans Ω.

3.4. Que peut-on dire de fonctions $u, v \in E$ telles que $\Delta u = \Delta v$ dans Ω et $u = v$ sur $\partial\Omega$?

4. Une inégalité sur les compacts de Ω

On désigne dans toute cette section par Ω' un ouvert non vide possédant la propriété (P) [voir préambule] et tel que $\Omega' \subset\subset \Omega$.

4.1. Montrer que $d_0 = d(\overline{\Omega'}, \partial\Omega) = \inf \{ d(x, y) ; x \in \overline{\Omega'}, y \in \partial\Omega \}$ est strictement positif.

4.2. Vérifier que l'on peut trouver $\delta > 0$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $z^1, \ldots, z^q \in \Omega'$ tels que :

i. $\Omega' \subset \bigcup_{i=1}^{q} B_\delta(z^i)$

ii. $B_{4\delta}(z^i) \subset \Omega$, $\forall i = 1, \ldots, q$.

4.3. Déterminer (explicitement) un nombre positif Λ tel que pour toute fonction $u \in H(\Omega)$, $u \geqslant 0$ dans Ω et pour tous $x, y \in B_R(z)$ tel que $B_{4R}(z) \subset \Omega$, on ait : $u(x) \leqslant \Lambda\, u(y)$.

[On pourra utiliser 2.3 avec différents choix de boules.]

4.4. A l'aide des deux questions précédentes (où $\delta = R$), montrer que tout $u \in H(\Omega)$, tel que $u \geqslant 0$ dans Ω, satisfait à l'inégalité :

$$\sup_{\Omega'} u \leqslant C \inf_{\Omega'} u$$

où C est une constante ne dépendant que de Ω et Ω'.

[On pourra utiliser la propriété (P) et exprimer C en termes de Λ et de q.]

5. Convergence de suites dans $H(\Omega)$

Dans cette section ainsi que dans la suivante, on admettra le résultat suivant qui sera démontré dans la section 7 (question 7.9) :

Étant données une boule $B = B_R(a)$ ($R > 0$) et une application continue $\varphi : \partial B \to \mathbb{R}$, il existe un $u \in H(B)$ unique vérifiant $u = \varphi$ sur ∂B.

5.1. Soit $u \in C^0(\Omega)$ vérifiant, pour toute boule $B_R(a) \subset\subset \Omega$,

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + R\,p(0))\, d0 .$$

On considère la fonction $h \in H(B)$ telle que $h = u$ sur ∂B. En adaptant les raisonnements de la partie 3, montrer que $u = h$ dans B, et que $u \in H(\Omega)$.

5.2. En déduire que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(\Omega)$ converge uniformément vers u dans Ω, on a $u \in H(\Omega)$.

5.3. On suppose que Ω est borné. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H(\Omega)$ une suite telle que la suite $\varphi_n = u_n \mid \partial\Omega$ converge uniformément sur $\partial\Omega$. Montrer à l'aide de 3.2 que u_n est uniformément convergente dans Ω.

5.4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ une suite croissante : $u_{n+1} \geqslant u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\exists\, a \in \Omega$ tel que la suite numérique $u_n(a)$ reste bornée. En appliquant l'inégalité de 4.4; montrer que u_n est uniformément convergente sur tout ouvert Ω' tel que $\Omega' \subset\subset \Omega$.

6. Résolution du problème aux limites dans Ω

On suppose dans toute la suite du problème que l'ouvert Ω est *borné*. On introduit deux classes de fonctions continues.

$G^+(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in C^0(\Omega)$ telles que pour toute boule $B \subset\subset \Omega$ et pour tout $h \in H(B)$, si $u \geqslant h$ sur ∂B, alors $u \geqslant h$ dans B.

$G^-(\Omega) = \{ u \in C^0(\Omega) ; \; -u \in G^+(\Omega) \}$.

6.1. Vérifier que $G^+(\Omega) \supset H^+(\Omega)$ et $G^-(\Omega) \supset H^-(\Omega)$.

6.2. Montrer que les fonctions de $G^+(\Omega)$ vérifient les mêmes inégalités établies en 2.4 que les fonctions de $H^+(\Omega)$.

6.3. Soit $u \in G^-(\Omega)$ et $v \in G^+(\Omega)$ avec $v \geqslant u$ sur $\partial\Omega$.

Démontrer l'alternative :

i. Soit $v > u$ dans Ω;

ii. Soit $v = u$ dans Ω.

[On pourra examiner les conséquences de l'existence de $x_0 \in \Omega$ tel que $u(x_0) - v(x_0) = \sup(u - v) \geqslant 0$ en introduisant les fonctions $h, g \in H(B)$ telles que $h = u$, $g = v$ sur ∂B, B étant une boule centrée en x_0, dont l'existence sera démontrée en 7.9 ci-dessous.]

6.4. Soit $u \in G^-(\Omega)$ et une boule $B \subset\subset \Omega$; soit $h \in H(B)$ tel que $h = u$ sur ∂B (voir 7.9). On appelle relèvement de u relatif à B la fonction $\bar{u}$ définie par :

$$\begin{cases} \bar{u}(x) = u(x) & \text{si } x \notin B \\ \bar{u}(x) = h(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Montrer que $\bar{u} \in G^-(\Omega)$.

6.5. Soient $u_1, \ldots, u_k \in G^-(\Omega)$; on pose pour tout $x \in \Omega$:

$u(x) = \max \{ u_1(x), u_2(x); \ldots, u_k(x) \}$.

Vérifier que $u \in G^-(\Omega)$.

Soit $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On définit :

$$S(\varphi) = \{ u \in G^-(\Omega) ; \ u \leqslant \varphi \text{ sur } \partial\Omega \}$$

et on pose, pour $x \in \bar{\Omega}$:

$$u(x) = \sup_{v \in S(\varphi)} v(x)$$

6.6. *a.* Vérifier que $S(\varphi) \neq \emptyset$

b. Établir l'existence d'une constante K dépendant de φ telle que $v \leqslant K$ dans Ω, $\forall\, v \in S(\varphi)$. En déduire que u est bien définie sur Ω et $u \leqslant K$ dans Ω.

6.7. Soit $a \in \Omega$ un point fixé. Construire une suite de fonctions (v_n) satisfaisant aux conditions suivantes $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

i. $v_n \in S(\varphi)$;

ii. $v_n \leqslant v_{n+1}$ dans Ω;

iii. $\lim_{n \to \infty} v_n(a) = u(a)$;

iv. $v_n \geqslant -K$ sur $\bar{\Omega}$,

où K désigne une constante (dépendant de φ).

6.8. Soit $r > 0$ tel que $B_r(a) \subset\subset \Omega$. On désigne par $\bar{v}$ le relèvement relatif à la boule $B = B_r(a)$ d'une fonction $v \in S(\varphi)$ (cf. 6.4). Montrer que la suite $\bar{v}_n$ possède les propriétés i, ii, iii, et iv de la question précédente.

6.9. Soit $w_0 \in S(\varphi)$ une fonction arbitrairement fixée. On considère la suite de fonctions $(\bar{w}_n)$ définie par $w_n(x) = \max \{ w_0(x), \bar{v}_n(x) \}$ et $\bar{w}_n$ est le relèvement de w_n relatif à B. Vérifier pour la suite $(\bar{w}_n)$ les propriétés i, ii, iii et iv de 6.7.

6.10. Prouver la convergence de $\bar{v}_n$ et $\bar{w}_n$ sur $\bar{B}$ vers des fonctions v et w respectivement telles que $v, w \in H(B)$. Comparer v et w sur ∂B et au point a.

6.11. En déduire que $u \in H(\Omega)$.

6.12. On appelle barrière en $\xi \in \partial\Omega$ une fonction $\beta \in C^0(\bar{\Omega})$ telle que $\beta \in G^+(\Omega)$, $\beta > 0$ sur $\bar{\Omega} - \{\xi\}$ et $\beta(\xi) = 0$.

Soit $\xi \in \partial\Omega$ un point fixé et β une telle barrière en ξ. On pose :

$\rho_\varepsilon(\xi) = \sup_{x \in \partial\Omega \cap \bar{B}_\varepsilon(\xi)} |\varphi(x) - \varphi(\xi)|$ et, pour $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$:

$$\psi_+(x) = \varphi(\xi) + \rho_\varepsilon(\xi) + k\,\beta(x)$$
$$\psi_-(x) = \varphi(\xi) - \rho_\varepsilon(\xi) - k\,\beta(x)$$

Montrer que l'on peut choisir $k > 0$ de telle sorte que $\psi_- \leqslant \varphi \leqslant \psi_+$ sur $\partial\Omega$. Comparer alors ψ_-, ψ_+ et u dans Ω.

6.13. En déduire $\lim_{x \in \Omega,\, x \to \xi} u(x)$.

6.14. On suppose que Ω jouit de la propriété suivante :

En tout point $\xi \in \partial\Omega$, il existe $b \in \mathbb{R}^2$ et $\rho > 0$ (dépendant de ξ) tel que $\bar{B}_\rho(b) \cap \bar{\Omega} = \{\xi\}$. Construire une barrière β en tout point $\xi \in \partial\Omega$.

6.15. Conclure de ce qui précède que si Ω vérifie la propriété de 6.14, alors pour toute fonction continue $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, il existe une solution et une seule $u \in E(\Omega)$ du problème aux limites :

$$(P.L.) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

7. Problème aux limites dans une boule

On se propose dans cette section d'établir par une méthode directe l'existence d'une solution de (P.L.) lorsque Ω est une boule.

Dans toute cette partie (sauf pour la dernière question), on pose $B = B_1(0)$, $(0 = (0, 0))$, $\gamma(r) = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{Log} r$, $\forall\, r > 0$, et pour $a \in B \setminus \{0\}$, $\bar{a} = \dfrac{1}{|a|^2} a$.

Pour tous $x, a \in \bar{B}$, $x \neq a$, on définit :

$$G(x, a) = \gamma(|x - a|) - \gamma(|a|\,|x - \bar{a}|) \quad \text{si } a \neq 0$$

et

$G(x, 0) = \gamma(|x|)$.

7.1. Vérifier que pour $|x| = 1$, on a $\quad |a|\,|x - \bar{a}| = |x - a|$.

Dans ce qui suit a est fixé, $|a| < 1$ $(a \in B)$ et on étudie l'application $x \longrightarrow G(x, a)$ de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, que l'on notera $g_a(x) = G(x, a)$.

7.2. Vérifier que g_a est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{a, \bar{a}\}$. Calculer Δg_a.

7.3. Calculer $\dfrac{\partial g_a}{\partial r}(x)$ pour $r = |x| = 1$, où l'on pose $x = r\,p(0)$.

En reprenant les notations de la partie I, avec le choix $v = G$ et $u \in H(B)$, calculer $\lim\limits_{\rho \to 0} I_{B_{\rho}(a)}(u, G)$.

7.4. En déduire (à l'aide de 1.4) que si $u \in H(B)$, pour tout $a \in B$, $u(a)$ s'exprime de la façon suivante :

$$u(a) = \alpha(a) \int_0^{2\pi} \frac{u(p(0))}{|p(0) - a|^2}\, d0$$

où $\alpha(a)$ est une fonction de a dont on donnera une expression simple.

On pose, dans la suite, $K(x, a) = \dfrac{\alpha(a)}{|x - a|^2}$.

7.5. Calculer $\int_0^{2\pi} K(p(0), a)\, d0$.

7.6. Pour x fixé, $|x| = 1$, calculer $\Delta_a K(x, a) = \sum_{i=1}^{2} \dfrac{\partial^2 K}{\partial a_i^2}(x, a)$.

7.7. Soit $\varphi : \partial B = \{x \in \mathbb{R}^2;\ |x| = 1\} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On pose :

$$u(y) = \int_0^{2\pi} K(p(0), y) \quad \varphi(p(0))\, d0 \qquad \text{si } |y| < 1,$$

et :

$$u(y) = \varphi(y) \quad \text{si } |y| = 1.$$

a. Vérifier que $u \in C^2(B)$ et que $\Delta u = 0$ dans B;

b. Soit $x_0 \in \partial B$. Exprimer $u(y) - u(x_0)$ à l'aide d'une intégrale faisant intervenir α, $K(p(0), y)$ et $\varphi(p(0)) - \varphi(x_0)$;

c. Soit $x_0 \in \partial B$ et $\delta > 0$ fixés. Montrer que l'on peut trouver une constante $C(\delta) > 0$ (ne dépendant que de δ et de $m = \sup\limits_{x \in \partial B} |\varphi(x)|$) telle que pour tout y vérifiant $|y - x_0| \leqslant \delta/2$, on ait :

$$|u(y) - u(x_0)| \leqslant \{ \sup_{\substack{x \in \partial B \\ |x - x_0| < \delta}} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \} + C(\delta)(1 - |y|^2).$$

d. En déduire que $u \in C^0(\bar{B})$.

7.8. De ce qui précède, conclure (en se ramenant au cas de $B_1(0)$) que pour toute boule $B = B_R(a)$, $R > 0$ et toute application continue $\varphi : \partial B \to \mathbb{R}$, il existe un $u \in H(B)$ unique vérifiant $u = \varphi$ sur ∂B.

8. Caractérisation variationnelle

Dans cette section, étant donnée une boule $B \subset\subset \Omega$, on pose :

$$E_B(\Omega) = \{ w \in E(\Omega);\quad w = 0 \text{ dans } \Omega \setminus B \}$$

et, pour $v \in E(\Omega)$,

$$J_B(v) = \iint_B \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2 \right\} dx_1\, dx_2.$$

8.1. Démontrer que la solution u de (P.L.) définie en 6.15 satisfait :

$$J_B(u + w) \geqslant J_B(u), \quad \forall\, w \in E_B(\Omega), \quad \forall\, B \subset\subset \Omega.$$

8.2. Réciproquement, soit $v \in E(\Omega)$ telle que $v = \varphi$ sur $\partial\Omega$ et :

$$J_B(v + w) \geqslant J_B(v) \quad \forall\, w \in E_B(\Omega), \quad \forall\, B \subset\subset \Omega \text{ (B est une boule).}$$

a. En déduire que :

$$\iint_B \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial w}{\partial x_2} \right\} dx_1\, dx_2 = 0$$

b. Trouver la valeur de $\iint_B \Delta v\, w\, dx_1\, dx_2$ pour $w \in E_B(\Omega)$ et une boule $B \subset\subset \Omega$.

8.3. En conclure que $v \in H(\Omega)$ et que $v = u$.